الوحدة الثالثة
القوى المتوازية المستوية

٣ - ١ محصلة القوى المتوازية المستوية

القوى المستوية هى القوى التى تقع خطوط عملها فى مستوى واحد وهذه القوى إما أن تتقاطع خطوط عملها فى نقطة واحدة أو تتقاطع خطوط عملها فى أكثر من نقطة أو تكون خطوط عملها متوازية وتسمى القوى فى هذه الحالة "القوى المتوازية المستوية"

ولإيجاد محصلة القوى المتوازية نبدأ بإيجاد محصلة قوتين متوازيتين ويكون لدينا الحالتين الآتيتين:

أولا: محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الإتجاه:

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الإتجاه هى قوة فى أتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما.

أى أنه:

إذا كانت $\vec{ق}_١$ ، $\vec{ق}_٢$ فى إتجاه واحد وتؤثران عند أ ، ب فإن:

- مقدار المحصلة : $ح = ق_١ + ق_٢$
- إتجاه المحصلة : فى نفس إتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة: تقسم المسافة بين خطى عمل القوتين

من الداخل (جـ ∈ $\overline{أب}$) بالنسبة العكسية لمعيار القوتين (المحصلة تكون اقرب للقوة الكبرى)

أى أن: $ق_١ \times$ بعدها عن المحصلة = $ق_٢ \times$ بعدها عن المحصلة

$$\therefore ق_١ \times أجـ = ق_٢ \times بجـ$$

(شكل: أ ، جـ ، ب ؛ $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ح = ق_١ + ق_٢$ ، $\vec{ى}$)

نتيجة:

إذا كانت القوتان متساويتان وفى إتجاه واحد فإن:

المحصلة تكون ضعف إحداهما وفى إتجاههما وتنصف المسافة بينهما

أى أنه إذا كانت $ق_١ = ق_٢ = ق$ فإن:

$ح = ٢ق$ وفى إتجاههما ويكون $ءجـ = جـب$

(شكل: ء ، جـ ، ب ؛ ق ، ق ، $ح = ٢ق$ ، $\vec{ى}$)

ملاحظة هامة:

عندما تكون القوتان المتوازيتان فى اتجاه واحد فإن:

(١) المحصلة تعمل بين القوتين

(٢) المحصلة أقرب للقوة الكبرى

(٣) المحصلة أكبر من القوة الكبرى (المحصلة اكبر من كلا القوتين)

ثانيا: محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الإتجاه:

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الإتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى إتجاه القوة الأكبر معيارا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارا بنسبة عكسية لمعياريهما.

أى أنه:

$ع = ق_١ - ق_٢$ ، $ق_١ > ق_٢$

إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فى إتجاهين متضادين

حيث $ق_١ > ق_٢$ وتؤثران عند أ ، ب فإن:

- مقدار المحصلة : $ع = ق_١ - ق_٢$
- إتجاه المحصلة : فى إتجاه القوة الكبرى
- نقطة تأثير المحصلة: تقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج ($جـ \notin \overline{أب}$) ومن ناحية القوة الكبرى بالنسبة العكسية لمعيار القوتين (المحصلة تكون اقرب للقوة الكبرى)

أى أن: $ق_١ \times$ بعدها عن المحصلة = $ق_٢ \times$ بعدها عن المحصلة

$$\therefore ق_١ \times أجـ = ق_٢ \times بجـ$$

ملاحظة هامة:

عندما تكون القوتان المتوازيتان فى اتجاهين متضادين فإن:

(١) المحصلة تعمل خارج القوتين

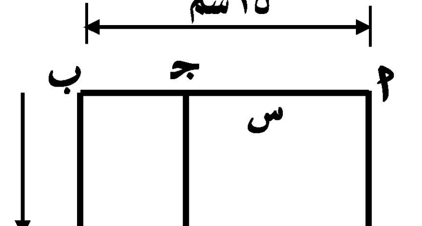
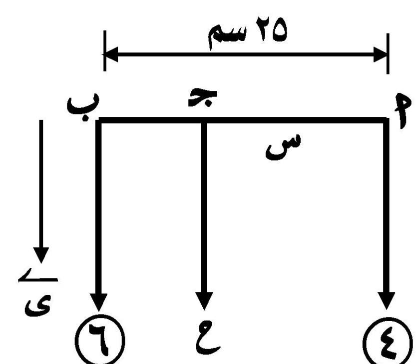
(٢) المحصلة أقرب للقوة الكبرى

(٣) المحصلة أصغر من القوة الكبرى (المحصلة أصغر من احدى القوتين او كلاهما)

مثـــال:

قوتان متوازيتان يعملان فى نفس الإتجاه مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أب = ٢٥ سم أوجد محصلة القوتين.

الحـــل:

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه القوتين

∴ $\overrightarrow{ق}_1 = ٤\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_2 = ٦\,\overrightarrow{ى}$

مقدار واتجاه المحصلة

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 = ٤\,\overrightarrow{ى} + ٦\,\overrightarrow{ى} = ١٠\,\overrightarrow{ى}$

نقطة تأثير المحصلة

نفرض أن المحصلة تؤثر عند نقطة جـ ∈ $\overline{أب}$ حيث أجـ = س ∴ بجـ = ٢٥ − س

∵ $ق_1$ × أجـ = $ق_2$ × بجـ ∴ ٤ × س = ٦ × (٢٥ − س) ∴ ٤س = ١٥٠ − ٦س

∴ ١٠س = ١٥٠ ∴ س = ١٥ ∴ أجـ = ١٥ سم

أى أن مقدار المحصلة يساوى ١٠ نيوتن وتعمل فى أتجاه القوتين وتؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ١٥ سم

مثـــال:

أوجد محصلة قوتان متوازيتان متضادتان فى الإتجاه مقدارهما ٧ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطتين أ ، ب حيث أب = ٢٠ سم .

الحـــل:

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه القوة ١٢ نيوتن

∴ $\overrightarrow{ق}_1 = -٧\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ق}_2 = ١٢\,\overrightarrow{ى}$

مقدار واتجاه المحصلة

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق}_1 + \overrightarrow{ق}_2 = -٧\,\overrightarrow{ى} + ١٢\,\overrightarrow{ى} = ٥\,\overrightarrow{ى}$

نقطة تأثير المحصلة

نفرض أن المحصلة تؤثر عند نقطة جـ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ لكن جـ ∈ $\overleftarrow{أب}$

حيث بجـ = س ∴ أجـ = ٢٠ + س

∵ $ق_1$ × أجـ = $ق_2$ × بجـ ∴ ٧ × (٢٠ + س) = ١٢ × س

∴ ١٢س = ١٤٠ + ٧س ∴ ٥س = ١٤٠ ∴ س = ٢٨ ∴ ب جـ = ٢٨ سم

أى أن مقدار المحصلة يساوى ٥ نيوتن وتعمل فى أتجاه القوة ١٢ نيوتن وتؤثر فى نقطة خارج القوتين وتبعد عن القوة الكبرى عند ب بمقدار ٢٨ سم

🕮 عزوم القوى المتوازية:

نظرية: مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لأى نقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

🕮 محصلة عدة قوى متوازية:

لتعيين محصة عدة قوى متوازية مستوية نتبع الآتى:

(١) نفرض وحدة متجهات $\overleftarrow{ى}$ فى إتجاه إحدى القوى ونعبر عن هذه القوى بدلالة $\overleftarrow{ى}$

وتكون المحصلة $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2 + \overleftarrow{ق}_3 + \cdots\cdots + \overleftarrow{ق}_ن$

أى أن القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى

ومن هذه العلاقة يتعين مقدار المحصلة وإتجاهها

(٢) نأخذ العزوم حول أى نقطة فى المستوى فنجد أن:

القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة

ومن هذه العلاقة يتعين نقطة تأثير المحصلة.

🕮 تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى والمحصلة:

إذا علمت إحدى القوتين المتوازيتين $\overleftarrow{ق}_1$ و محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ ولتعيين $\overleftarrow{ق}_2$ والبعد بين القوتين نتبع الآتى:

١) نفرض $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه $\overleftarrow{ح}$ ونعبر عن كل من $\overleftarrow{ق}_1$، $\overleftarrow{ح}$ بدلالة $\overleftarrow{ى}$

٢) نطبق العلاقة $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2$ ومنها يتحدد مقدار وإتجاه $\overleftarrow{ق}_2$ ولتحديد مكان عمل $\overleftarrow{ق}_2$ نجد أنه:

- إذا كانت $\overleftarrow{ق}_1$، $\overleftarrow{ح}$ فى إتجاهين متضادين فإن $\overleftarrow{ق}_2$ تعمل بينهما
- إذا كانت $\overleftarrow{ق}_1$، $\overleftarrow{ح}$ فى إتجاه واحد فإن $\overleftarrow{ق}_2$ تعمل خارجهما من جهة الأكبر فيهما

٣) نطبق النظرية

مجموع عزوم القوى حول نقطة تأثير المحصلة = عزم المحصلة حول نفس النقطة = صفر

ومن هذه العلاقة يتحدد بعد $ق_2$ عن $ح$ وبالتالى يتحدد البعد بين القوتين

مثـــال:

قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٦ ث.كجم ومقدار إحدى القوتين ٤ ث.كجم وتعمل على بعد ٨ سم من المحصلة أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان:

أولا: فى إتجاه واحد ثانيا: فى إتجاه متضادين

الحـــل:

أولا: القوة المعلومة والمحصلة فى إتجاه واحد:

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه $\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع} = ٦\overrightarrow{ى}$

∵ $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$ ∴ $٦\overrightarrow{ى} = ٤\overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_2}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2} = ٢\overrightarrow{ى}$

∴ $ق_2$ = ٢ ث.كجم وفى اتجاه المحصلة وتؤثر عند نقطة ب خارج المحصلة حيث ب جـ = س

∵ مجموع عزوم القوى حول جـ = عزم المحصلة حول جـ = صفر

∴ $-٤ \times ٨ + ٢ \times س = ٠$ ⟸ ∴ ٢س = ٣٢ ⟸ ∴ س = ١٦سم

∴ البعد بين خطى عمل القوتين = ٨ + ١٦ = ٢٤ سم

ثانيا: القوة المعلومة والمحصلة فى إتجاهين متضادين

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه $\overrightarrow{ع}$

∴ $\overrightarrow{ق_1} = -٤\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع} = ٦\overrightarrow{ى}$

∵ $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$ ∴ $٦\overrightarrow{ى} = -٤\overrightarrow{ى} + \overrightarrow{ق_2}$ ∴ $\overrightarrow{ق_2} = ١٠\overrightarrow{ى}$

∴ $ق_2$ = ١٠ ث.كجم وفى اتجاه المحصلة وتؤثر عند نقطة ب بين $ق_1$ ، ع حيث ب جـ = س

∵ مجموع عزوم القوى حول جـ = عزم المحصلة حول جـ = صفر

∴ $-٤ \times ٨ + ١٠ \times س = ٠$ ⟸ ∴ ١٠س = ٣٢ ⟸ ∴ س = ٣,٢سم

∴ البعد بين خطى عمل القوتين = ٨ − ٣,٢ = ٤,٨ سم

مثـــال:

الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية العمودية على $\overline{أب}$

اوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة

(أ) نقطة أ (ب) نقطة منتصف $\overline{أب}$

الحـــل:

(أ) العزوم حول نقطة أ

القوة ٣ نيوتن تمر بنقطة أ فيكون عزمها يساوى صفر وبمراعاة إتجاه دوران باقى القوى حول أ فإن:

القياس الجبرى للعزوم حول أ

= ٥ × ٣ + ١ × ٤ − ٤ × ٢ − ٦ × ٥ = −١٩ نيوتن . سم

(ب) العزوم حول منتصف $\overline{أب}$

القياس الجبرى للعزوم حول منتصف $\overline{أب}$

= ٥ × ٠,٥ + ١ × ١,٥ + ٣ × ٢,٥ + ٤ × ٠,٥ − ٦ × ٢,٥ = −١,٥ نيوتن . سم

مثـــال:

أ، ب، جـ، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أب = ٤سم ، ب جـ = ٦سم ، جـ د = ٨سم ، د هـ = ١٠ سم . أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث.كجم فى النقط أ، ب، جـ، د، هـ على الترتيب وفى إتجاه عمودى على $\overline{أهـ}$ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الإتجاه، والقوتان الأخريان فى الإتجاه المضاد . عين محصلة المجموعة.

الحـــل:

نفرض $\overleftarrow{ى}$ وحدة متجهات فى إتجاه القوى الثلاثة أى رأسيا لأسفل كما بالشكل

∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٦٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٣٠ $\overleftarrow{ى}$ + ٥٠ $\overleftarrow{ى}$ − ٨٠ $\overleftarrow{ى}$ − ٤٠ $\overleftarrow{ى}$ = ١٤٠ $\overleftarrow{ى}$ − ١٢٠ $\overleftarrow{ى}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ى}$

∴ ح = ٢٠ ث.كجم

وفى إتجاه القوى الثلاثة أى رأسيا لأسفل

لتحديد خط عمل المحصلة

نفرض أن المحصلة تقطع $\overleftrightarrow{أهـ}$ فى نقطة م

وتبعد عن أ مسافة س

بأخذ العزوم حول أ

∴ عزم المحصلة حول أ = المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أ

∴ −٢٠ × س = ٦٠ × ٠ + ٣٠ × ١٠ + ٥٠ × ١٨ − ٨٠ × ٤ − ٤٠ × ٢٨

∴ −٢٠س = ٣٠٠ + ٩٠٠ − ٣٢٠ − ١١٢٠ = −٢٤٠

∴ س = $\frac{-٢٤٠}{-٢٠}$ = ١٢سم



أى أن المحصلة = ٢٠ ث.كجم وتعمل رأسيا لأسفل وخط عملها يقع يمين أ على بعد ١٢ سم

مثـــال:

أ، ب، جـ، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أب = ٣بجـ = ٢جـد = ٤دهـ = ١٢ سم.
أثرت قوى مقاديرها ٣، $ق_١$، ١٠ نيوتن عند النقط أ، جـ، هـ على الترتيب فى إتجاه واحد عمودى على $\overline{أهـ}$
كما أثرت قوتان مقدارهما ٤، $ق_٢$ نيوتن عند ب، د على الترتيب وفى إتجاه مضاد للقوى الأولى. فإذا
كان مقدار محصلة المجموعة = ٥ نيوتن وتمر بنقطة ب وفى إتجاه القوى الثلاث الأولى أوجد $ق_١$، $ق_٢$

الحـــل:

∵ أب = ٣بجـ = ٢جـد = ٤دهـ = ١٢ سم
∴ أب = ١٢ سم ، بجـ = ٤سم ، جـد = ٦ سم ، دهـ = ٣سم

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه $\overrightarrow{ح}$

∴ $\overrightarrow{ح} = ٣\overrightarrow{ى} + ق_١\overrightarrow{ى} + ١٠\overrightarrow{ى} - ٤\overrightarrow{ى} - ق_٢\overrightarrow{ى}$

∴ $٥\overrightarrow{ى} = ٩\overrightarrow{ى} + ق_١\overrightarrow{ى} - ق_٢\overrightarrow{ى}$

∴ $ق_١ - ق_٢ = -٤$ (١)

بأخذ العزوم حول جـ

∴ عزم المحصلة حول جـ = المجموع الجبرى لعزوم القوى حول جـ

∴ $٥ \times ٤ = ٣ \times ١٦ - ٤ \times ٤ + ق_١ \times ٠ + ق_٢ \times ٦ - ١٠ \times ٩$

∴ $٢٠ = ٤٨ - ١٦ + ٦ق_٢ - ٩٠$ ⟸

∴ $٦ق_٢ = ٧٨$ ⟸ ∴ $ق_٢ = \frac{٧٨}{٦} = ١٣$ نيوتن

بالتعويض فى (١)

∴ $ق_١ - ١٣ = -٤$ ⟸ ∴ $ق_١ = -٤ + ١٣$ ⟸ ∴ $ق_١ = ٩$ نيوتن

مثـــال:

قوتان متوازيتان وفى إتجاه واحد مقدارهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ، ب على الترتيب ، فإذا تحركت القوة ٢٠ نيوتن بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overrightarrow{بأ}$ فإثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{٢}{٥}$س فى نفس الإتجاه.

الحـــل:

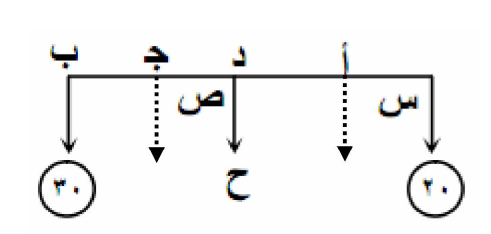
أولا : قبل تحرك القوة ٢٠ نيوتن

∴ ح = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ = ٢٠ + ٣٠ = ٥٠ نيوتن

وتؤثر عند نقطة جـ حيث جـ ∋ $\overline{\text{أب}}$

∴ ٢٠ × أجـ = ٣٠ × بجـ ⟸ ∴ ٢أجـ = ٣بجـ (١)

ثانيا : القوة ٢٠ تحركت مسافة س على الشعاع $\overrightarrow{\text{بأ}}$



نفرض أن المحصلة تحركت من جـ الى د مسافة ص

∴ ح = ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ = ٢٠ + ٣٠ = ٥٠ نيوتن

وتؤثر عند نقطة د حيث د ∋ $\overline{\text{أب}}$

∴ ٢٠ × (س + أد) = ٣٠ × (ص + بجـ)

∴ ٢ × (س + أجـ − ص) = ٣ × (ص + بجـ)

∴ ٢س + ٢أجـ − ٢ص = ٣ص + ٣بجـ بالتعويض من (١)

∴ ٢س + ~~٣بجـ~~ − ٢ص = ٣ص + ~~٣بجـ~~ ⟸ ∴ ٢س = ٥ص ⟸ ∴ ص = $\frac{٢}{٥}$ س

∴ المحصلة تحركت مسافة قدرها $\frac{٢}{٥}$ س فى نفس الإتجاه

مثــــال:

تؤثر القوتان $\overline{\text{ق}}_{١}$ = ٣ $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٢}$ = −٩ $\overline{\text{س}}$ + ٣ $\overline{\text{ص}}$ فى النقطتين أ (−١، ٠)، ب(١، ٢) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تأثيرها.

الحـــل:

∵ $\overline{\text{ق}}_{٢}$ = −٩ $\overline{\text{س}}$ + ٣ $\overline{\text{ص}}$ = −٣(٣ $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$) ∴ $\overline{\text{ق}}_{٢}$ = −٣ $\overline{\text{ق}}_{١}$

∴ القوتان متوازيتان وفى إتجاهين متضادين

∵ $\overline{\text{ح}}$ = $\overline{\text{ق}}_{١}$ + $\overline{\text{ق}}_{٢}$ ∴ $\overline{\text{ح}}$ = ٣ $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$ − ٩ $\overline{\text{س}}$ + ٣ $\overline{\text{ص}}$

∴ $\overline{\text{ح}}$ = ٣ $\overline{\text{س}}$ − $\overline{\text{ص}}$ − ٩ $\overline{\text{س}}$ + ٣ $\overline{\text{ص}}$ ∴ $\overline{\text{ح}}$ = −٦ $\overline{\text{س}}$ + ٢ $\overline{\text{ص}}$

نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة جـ حيث جـ ∌ $\overline{\text{أب}}$ لكن جـ ∋ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

∵ ق$_{١}$ × أجـ = ق$_{٢}$ × بجـ ∴ ق$_{١}$ × أجـ = −٣ق$_{١}$ × بجـ

∴ $\overline{أجـ} = -٣ \overline{بجـ}$ ∴ $\frac{أجـ}{بجـ} = \frac{-٣}{١}$ ∴جـ تقسم $\overleftrightarrow{أب}$ من الخارج بنسبة ٣:١

ومن قانون نقطة التقسيم $جـ = \left(\frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢} ، \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢}\right)$ حيث $م_١ ، م_٢$ نسبة التقسيم

$$∴ جـ = \left(\frac{٣ \times ١ - ١ \times (-١)}{٣ - ١} ، \frac{٣ \times ٢ - ١ \times ٠}{٣ - ١}\right) = \left(\frac{٣ + ١}{٢} ، \frac{٦}{٢}\right) = (٢ ، ٣)$$

🕮 مثـــال:

قوتان متوازيتان أصغرهما ٢٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من ساق خفيفه $\overline{أب}$ والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن وتبعد عن الطرف ب بمقدار ٨٠ سم فما مقدار القوة الكبرى وماطول الساق.

✍ الحـــل:

∵ المحصلة أصغر من إحدى القوتين

∴ القوتان فى اتجاهين متضادين والمحصلة فى إتجاه الكبرى (المجهولة)



$∴ ع = ق_١ - ق_٢$ حيث $ق_١ > ق_٢$

$∴ ١٠ = ق_١ - ٢٠ \Leftarrow ∴ ق_١ = ٣٠$

∴ القوة الكبرى = ٣٠ نيوتن

نفرض أن طول الساق $أب = ل$ ∴ $أجـ = ٨٠ + ل$

∵ $ق_١ \times$ بعدها عن المحصلة $= ق_٢ \times$ بعدها عن المحصلة

$∴ ٣٠ \times ٨٠ = ٢٠ \times (٨٠ + ل)$ بالقسمة على ٢٠

$∴ ١٢٠ = ٨٠ + ل \Leftarrow ∴ ل = ١٢٠ - ٨٠ = ٤٠$ سم ∴ طول الساق = ٤٠ سم



٣ - ٢ اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

إتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية:

قاعدة: إذا إتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحده يوازيها) يساوى صفر

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفر

وبتطبيق الشرطين السابقين نحصل على معادلتين فى مجهولين وبحلهما نحصل على قيمتيهما

ملاحظات هامة:

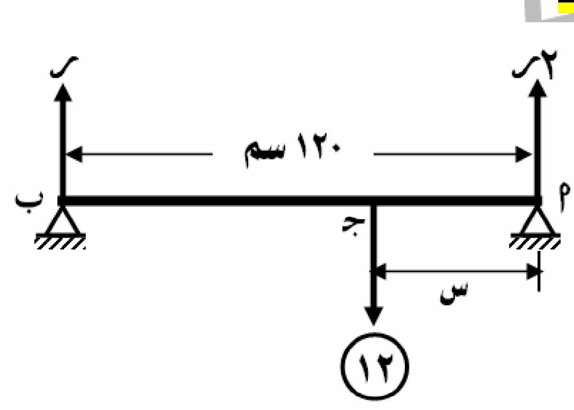
(١) أذا إرتكز قضيب أفقيا على حاملين ثم علق ثقل فى أحد طرفيه بحيث يكون القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول أحد الحاملين أو على وشك الإنفصال عن الحامل فإن رد الفعل عند الحامل الأخر ينعدم.

(٢) إذا علق قضيب من طرفيه بخيطين رأسيين فإن أكبر ثقل يمكن تعليقة فى أحد طرفى القضيب دون أن يختل التوازن يجعل مقدار الشد فى الطرف الآخر ينعدم.

مثـــال:

ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين .عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث.كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساويا لضعف قيمته عند الطرف الآخر.

الحـــل:



نفرض أن الثقل يتم تعليقه على بعد من أ = س

وأن رد الفعل عند ب = ر ∴ رد الفعل عند أ = ٢ر

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

∴ ٢ر + ر − ١٢ = ٠

∴ ٣ر = ١٢ ⟸ ∴ ر = ٤ ث.كجم

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ ١٢ × أجـ − ر × أب = ٠ ⟸ ∴ ١٢ × س − ٤ × ١٢٠ = ٠

$\therefore$ س $= \frac{١٢٠ \times ٤}{١٢} = ٤٠$ سم أى أنه يتم تعليق الثقل على بعد ٤٠ سم من أى من الطرفين

ويكون رد الفعل عند الحامل القريب من نقطة التعليق يساوى ضعف رد الفعل عند الحامل الآخر

مثـــال:

قضيب منتظم أ ب طوله ٨٠ سم ووزنه ٤ ث.كجم يؤثر فى منتصفه ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين احدهما على بعد ١٠سم من أ والثانى على بعد ٢٠سم من ب وعلق فى القضيب ثقلان مقدارهما ٣، ٥ ث.كجم على بعدى ٢٠ سم من أ ، ٣٠ سم من ب على الترتيب. عين الضغط على كل من الحاملين.

الحـــل:

$\because$ القضيب متزن تحت تأثير خمس قوى متوازية

$\therefore$ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$\therefore ر_١ + ر_٢ - ٣ - ٤ - ٥ = ٠$

$\therefore ر_١ + ر_٢ = ١٢$ (١)

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

$\therefore$ العزوم حول جـ = ٠

$\therefore ٣ \times ١٠ + ٤ \times ٣٠ + ٥ \times ٤٠ - ر_٢ \times ٥٠ = ٠$

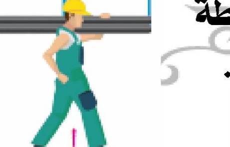
$\therefore ٥٠ ر_٢ = ٣٥٠ \Leftarrow \therefore ر_٢ = \frac{٣٥٠}{٥٠} = ٧$ ث.كجم

بالتعويض فى (١) $\therefore ر_١ + ٧ = ١٢ \Leftarrow \therefore ر_١ = ١٢ - ٧ = ٥$ ث.كجم

لاحظ أنه كان يمكن اخذ العزوم حول النقطة د لحذف $ر_٢$ وأيجاد $ر_١$ اولا ثم $ر_٢$ أو أخذ العزوم حول أى نقطة أخرى مثل أ أو ب وتكوين معادلة ثانية فى $ر_١$ ، $ر_٢$ ثم حلها مع المعادلة (١)

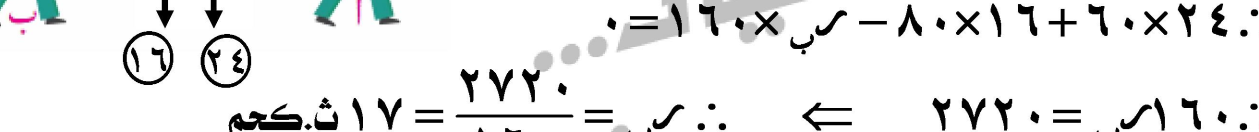
مثـــال:

رجلان أ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ ث.كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقا وزنه ٢٤ ث.كجم كما هو موضح بالشكل أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين عند أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين.



الحـــل:

$\because$ اللوح متزن تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية



∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

∴ $ر_م + ر_ب = ٢٤ + ١٦$

∴ $ر_م + ر_ب = ٤٠$ (١)

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ $٢٤ \times ٦٠ + ١٦ \times ٨٠ - ر_ب \times ١٦٠ = ٠$

∴ $١٦٠ ر_ب = ٢٧٢٠$ ⇐ ∴ $ر_ب = \frac{٢٧٢٠}{١٦٠} = ١٧$ ث.كجم

بالتعويض فى (١) ∴ $ر_م + ١٧ = ٤٠$ ⇐ ∴ $ر_م = ٤٠ - ١٧ = ٢٣$ ث.كجم

نفرض أن النقطة جـ يكون عندها كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين حيث أجـ = س

∴ $ر_م + ر_م = ٤٠$ ∴ $٢ر_م = ٤٠$ ∴ $ر_م = ٢٠$ ث.كجم

∴ العزوم حول أ = ٠ ∴ $٢٤ \times ٦٠ + ١٦ \times ٨٠ - ر_م \times س = ٠$

∴ $٢٠س = ٢٧٢٠$ ⇐ ∴ $س = \frac{٢٧٢٠}{٢٠} = ١٣٦$ سم

∴ كتف الرجل ب يكون عند نقطة على بعد ١٣٦ سم من الرجل أ حتى يتساوى الضغطين

مثـــال:

يرتكز قضيب أب طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى منتصفه فى وضع أفقى على حاملين احدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة جـ تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب . عين الضغط على كل من الحاملين. وأوجد أيضا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما قيمة الضغط على الحامل عند جـ عندئذ.

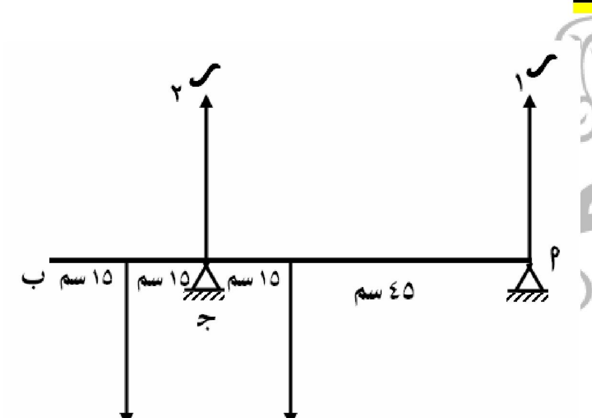
الحــل:

∵ القضيب متزن تحت تأثير اربع قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

∴ $ر_١ + ر_٢ - ٥٠ - ٢٠ = ٠$

∴ $ر_١ + ر_٢ = ٧٠$ (١)



، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ $٥٠ \times ٤٥ + ٢٠ \times ٧٥ - ر_٢ \times ٦٠ = ٠$

∴ ٦٠ $ر_{٢}$ = ٣٧٥٠ ⇐ ∴ $ر_{٢}$ = $\frac{٣٧٥٠}{٦٠}$ = ٦٢,٥ نيوتن

بالتعويض فى (١) ∴ $ر_{١}$ + ٦٢,٥ = ٧٠ ⇐ ∴ $ر_{١}$ = ٧٠ − ٦٢,٥ = ٧,٥ نيوتن

نفرض أن الثقل الذى يتم تعليقه عند ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران = و ث.كجم

∴ القضيب سيكون على وشك الدوران حول جـ

∴رد الفعل عند الحامل الموجود عند ٩ = ٠

∵ القضيب متزن تحت تأثير اربع قوى متوازية

∴مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

∴ $ر_{جـ}$ − ٥٠ − ٢٠ − و = ٠

∴ $ر_{جـ}$ − و = ٧٠ (٢)

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول جـ = ٠

∴ − ٥٠ × ١٥ + ٢٠ × ١٥ + و × ٣٠ = ٠

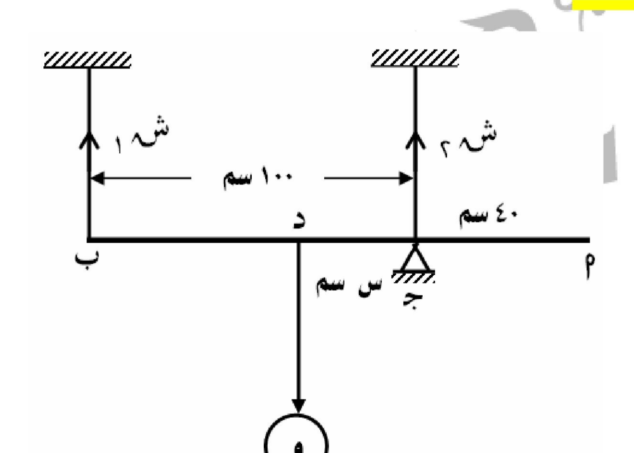
∴ ٣٠و = ٤٥٠ ⇐ ∴و = $\frac{٤٥٠}{٣٠}$ = ١٥ نيوتن

بالتعويض فى (٢) ∴ $ر_{جـ}$ − ١٥ = ٧٠ ⇐ ∴ $ر_{جـ}$ = ٧٠ + ١٥ = ٨٥ نيوتن

مثـــال:

قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقيا بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من ٩ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{١}{٤}$ الشد فى الخيط الثانى،فعين نقطة تأثير وزن القضيب وإذا علم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من ٩ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب.

الحـــل:



نفرض أن الوزن يؤثر عند نقطة د حيث جد = س

∵ الشد عند ب = $\frac{١}{٤}$ الشد عند ٩

∴ $ش_{٢}$ = ٤$ش_{١}$ (١)

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول د = ٠

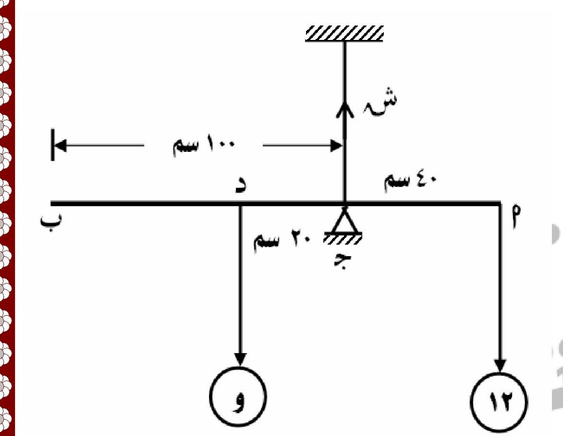
$\therefore$ ش$_2$ × جـ د − ش$_1$ × ب د = ٠

$\therefore$ ش$_2$ × س − ش$_1$ × (١٠٠ − س) = ٠ بالتعويض من (١) عن ش$_2$

$\therefore$ ٤ش$_1$ × س − ش$_1$ × (١٠٠ − س) = ٠ بالقسمة على ش$_1$

$\therefore$ ٤س − ١٠٠ + س = ٠ $\therefore$ ٥س = ١٠٠ ⟸ $\therefore$ س = $\frac{١٠٠}{٥}$ = ٢٠ سم

أى أن الوزن يؤثر فى نقطة على بعد ٦٠ سم من أ



$\because$ اكبر ثقل يلزم تعليقه عند أ دون أن يختل التوازن = ١٢نيوتن

$\therefore$ القضيب سيكون على وشك الدوران حول جـ

$\therefore$ الشد فى الخيط عند ب = ٠

$\therefore$ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

$\therefore$ العزوم حول جـ = ٠

$\therefore$ ١٢ × أجـ − و × جـد = ٠

$\therefore$ ١٢ × ٤٠ − و × ٢٠ = ٠ ⟸ $\therefore$ و = $\frac{٤٠ × ١٢}{٢٠}$ = ٢٤ نيوتن

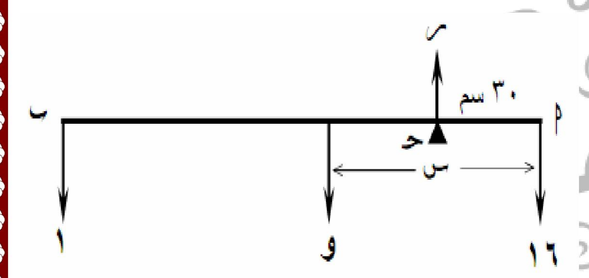
مثـــال:

أب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقلا قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقلا قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من أ وإذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ. أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن أ.

الحـــل:

نفرض أن الوزن (و) يؤثر عند نقطة على بعد س من الطرف

الحالة الأولى:



الثقل المعلق من أ = ١٦ نيوتن ونقطة الإتزان على بعد ٣٠سم

$\because$ القضيب متزن تحت تأثير اربع قوى متوازية

$\therefore$ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

$\therefore$ العزوم حول جـ = ٠

$\therefore$ ١ × ٩٠ + و × (س − ٣٠) − ١٦ × ٣٠ = ٠

$\therefore$ و(س − ٣٠) = ٣٩٠ (١)

الحالة الثانية:

الثقل المعلق من أ = ٨ نيوتن ونقطة الإتزان على بعد ٤٠سم

∵ القضيب متزن تحت تأثير اربع قوى متوازية

∴ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول ى = ٠

∴ ١×٨٠+و×(س−٤٠)−٨×٤٠=٠ ⇐ ∴ و(س−٤٠)=٢٤٠ (٢)

بقسمة المعادلتين (١) ، (٢)

∴ $\frac{و(س-٣٠)}{و(س-٤٠)} = \frac{٣٩٠}{٢٤٠}$ ⇐ ∴ $\frac{س-٣٠}{س-٤٠} = \frac{١٣}{٨}$

∴ ١٣س − ٥٢٠ = ٨س − ٢٤٠

∴ ٥س = ٢٨٠ ⇐ ∴ س = $\frac{٢٨٠}{٥}$ = ٥٦ سم

بالتعويض فى (١) ∴ و(٥٦−٣٠) = ٣٩٠ ⇐ ∴ و = $\frac{٣٩٠}{٢٦}$ = ١٥ نيوتن

∴ وزن القضيب = ١٥ نيوتن ويؤثر على بعد ٥٦ سم من الطرف أ

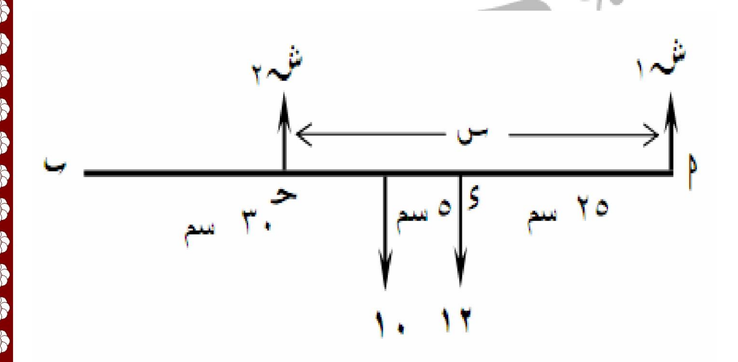
مثـــال:

قضيب منتظم أب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث.جم ويؤثر فى منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين احدهما مربوط فى نقطة أ والآخر فى نقطة جـ حيث أجـ = س سم ، علق ثقل قدره ١٢ ث.جم فى نقطة ى حيث أى = ٢٥ سم فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث.جم فأوجد القيم التى تقع بينها س ، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد فى كل من الخيطين.

الحـــل:

∵ القضيب متزن ∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

∴ $ش_1$ + $ش_2$ = ٢٢ (١)



∵ أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث.جم

أولا: نفرض أن $ش_1$ وصلت الى اقصى قيمة

∴ $ش_1$ = ١٥ ومن (١) ∴ $ش_2$ = ٧

∵ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ ١٢×٢٥ + ١٠×٣٠ − ٧×س = ٠

∴ ٧س = ٦٠٠ ∴ س = $\frac{٦٠٠}{٧}$ ≃ ٨٥,٧ سم وهذه القيمة اكبر من طول القضيب

∴ $ش_١$ لايمكن أن تصل الى القيمة ١٥ ث.جم

∴ نأخذ س بأكبر قيمة ممكنه لها وهى طول القضيب أى ان س = ٦٠ سم ونحسب قيم $ش_١$، $ش_٢$

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ ١٢×٢٥ + ١٠×٣٠ − $ش_٢$×٦٠ = ٠ ⟸ ∴ ٦٠$ش_٢$ = ٦٠٠

∴ $ش_٢$ = $\frac{٦٠٠}{٦٠}$ = ١٠ ث.جم

بالتعويض فى (١) ∴ $ش_١$ + ١٠ = ٢٢ ⟸ ∴ $ش_١$ = ٢٢ − ١٠ = ١٢ ث.جم

<u>ثانيا</u>: نفرض أن $ش_٢$ وصلت الى اقصى قيمة ∴ $ش_٢$ = ١٥ ومن (١) ∴ $ش_١$ = ٧

∴ العزوم حول أ = ٠

∴ ١٢×٢٥ + ١٠×٣٠ − ١٥×س = ٠ ∴ ١٥س = ٦٠٠ ∴ س = $\frac{٦٠٠}{١٥}$ = ٤٠ سم

∴ القيم التى تقع بينها س هى ٤٠ سم ، ٦٠ سم

اكبر قيمة للشد عند أ = ١٢ ث.جم ، أقل قيمة للشد عند أ = ٧ ث.جم

و اكبر قيمة للشد عند ب = ١٥ ث.جم ، أقل قيمة للشد عند ب = ١٠ ث.جم

مثـــال:

تؤثر القوى المستوية المتزنة والمتوازية $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ فى النقط أ = (٢، −١)، ب = (−٤، −٣)
، جـ = (٣، ٥) ، ء = (−١، ٠) على الترتيب فإذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ ، ||$\overleftarrow{ق_٢}$|| = ٢٠
نيوتن فى نفس إتجاه $\overleftarrow{ق_١}$. أوجد كلا من $\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ إذا كانت تعملان فى إتجاه مضاد لإتجاه $\overleftarrow{ق_١}$.

الحـــل:

∵ $\overleftarrow{ق_٢}$ // $\overleftarrow{ق_١}$ ∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ك $\overleftarrow{ق_١}$ ∴ ||$\overleftarrow{ق_٢}$|| = |ك| × ||$\overleftarrow{ق_١}$||

∴ ٢٠ = |ك| × $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ ∴ |ك| = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤ ∴ ك = ±٤

∵ $\overleftarrow{ق_٢}$ فى نفس إتجاه $\overleftarrow{ق_١}$ ∴ ك = ٤ ∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ١٦ $\overleftarrow{ص}$

∵ $\overleftarrow{ق_٣}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ تعملان فى إتجاه مضاد لإتجاه $\overleftarrow{ق_١}$

∴ $\overrightarrow{ق}_{٣} = -ل(٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص})$ ، $\overrightarrow{ق}_{٤} = -م(٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص})$

∵ القوى متزنة ∴ $\overrightarrow{ق}_{١} + \overrightarrow{ق}_{٢} + \overrightarrow{ق}_{٣} + \overrightarrow{ق}_{٤} = \overrightarrow{٠}$

∴ $٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + ١٢\overrightarrow{س} + ١٦\overrightarrow{ص} - ٣ل\overrightarrow{س} - ٤ل\overrightarrow{ص} - ٣م\overrightarrow{س} - ٤م\overrightarrow{ص} = \overrightarrow{٠}$

∴ $(١٥ - ٣ل - ٣م)\overrightarrow{س} + (٢٠ - ٤ل - ٤م)\overrightarrow{ص} = \overrightarrow{٠}$

∴ ١٥ − ٣ل − ٣م = ٠ ∴ ٣ل + ٣م = ١٥ ∴ ل + م = ٥ (١)

∵ مجموع العزوم حول أى نقطة = صفر ∴ $\overrightarrow{ج}_{و} = \overrightarrow{٠}$

∴ $\overrightarrow{وأ} \times \overrightarrow{ق}_{١} + \overrightarrow{وب} \times \overrightarrow{ق}_{٢} + \overrightarrow{وجـ} \times \overrightarrow{ق}_{٣} + \overrightarrow{وى} \times \overrightarrow{ق}_{٤} = \overrightarrow{٠}$

∴ (٢،−١)×(٣،٤) + (−٤،−٣)×(١٢،١٦) + (٣،٥)×(−٣ل،−٤ل) + (−١،٠)×(−٣م،−٤م) = ٠

∴ ٨ + ٣ − ٦٤ + ٣٦ − ١٢ل + ١٥ل + ٠ + ٤م = ٠

∴ −١٧ + ٣ل + ٤م = ٠ ∴ ٣ل + ٤م = ١٧ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبريا بضرب طرفى المعادلة (١) فى (−٤)

∴ −٤ل − ٤م = −٢٠

، ∴ ٣ل + ٤م = ١٧ بالجمع

∴ −ل = −٣ ∴ ل = ٣ ∴ $\overrightarrow{ق}_{٣} = -٣(٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}) = -٩\overrightarrow{س} - ١٢\overrightarrow{ص}$

بالتعويض فى (١) ∴ م = ٢ ∴ $\overrightarrow{ق}_{٤} = -٢(٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}) = -٦\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص}$